純楕円型特異点の分類と構成(多様体の特異点の最近の成果)

渡辺, 公夫; 石井, 志保子

数理解析研究所講究録
535巻 1984年 176-209

純楕円型特異点の分類と構成

筑波大　渡辺公夫 (Kimio Watanabe)
都立大　石井志保子 (Shihoko Ishii)

完備代数多様体を小平次元κで分類した(しつつある?)ように、正規孤立特異点もそのようなやり方で分類できないかという事を出発点とする。

本論では (X,x) を解析空間上の正規孤立特異点の芽とする。その次元は常に n という記号を用いて表わす。また上記の X は十分小さい x の Stein 近傍をも表わす。$f:\tilde{X}\to X$ を特異点 (X,x) の resolution とするとき、(X,x) の幾何種数 $p_g(X,x)$ を $\dim_{\mathbb{C}} R^{n-1}f_*\mathcal{O}_{\tilde{X},x}$ で定義し、これの多重化として、渡辺([14])は多重種数 $\{\delta_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ を導入した。

特異点 (X,x) が quasi-Gorenstein のとき [14] により次のいずれかが成立することがわかっている。

(i) $\delta_m(X,x)=0$ for $\forall m\geq 1$

(ii) $\delta_m(X,x)=1$ for $\forall m\geq 1$

(iii) $\delta_m(X,x)$ は変数 m に関して n 位の order で増大する。

ここで (X, x) が有理的であることと (i) が成立することは同値である。(ii) が成立するような特異点 (X, x) を純楕円型と呼ぶことにする（$P_g(X, x) = \delta_1(X, x) = 1$ だからもちろん楕円型）。$n = 2$ のとき、純楕円型特異点は、simple elliptic 又は cusp であることが知られており、それぞれに美しい理論がある。ここでは $n \geq 3$ として、純楕円型特異点を調べることにする。

§1 では、Du Bois 特異点の概念を紹介する。正規孤立特異点 (X, x) に対して、Du Bois であることと、canonical map $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}, x} \to H^i(E, \mathcal{O}_E)$ が $^\forall i > 0$ に対して同型になることと同値になる。ただし $f: \tilde{X} \to X$ は good resolution (cf. Def. 1) であって $E = f^{-1}(x)_{red}$。

§2 では、(X, x) が quasi-Gorenstein のとき、Du Bois であることと、$\delta_m(X, x) \leq 1$ ($^\forall m \in \mathbb{N}$) は同値であることを示す。さらに good resolution $f: \tilde{X} \to X$ に対して $f^{-1}(x)_{red} = E$ を irreducible components E_i $(i = 1 \cdots r)$ に分解し、$K_{\tilde{X}} = f^* K_X + \sum m_i E_i$ と表わしたときに、上の (i)(ii)(iii) はそれぞれ次と同値。

(i) $\Leftrightarrow$ $m_i \geq 0$ for $^\forall i$

(ii) $\Leftrightarrow$ $m_i \geq -1$ for $^\forall i$, $m_i = -1$ for $^\exists i$

(iii) $\Leftrightarrow$ $m_i \leq -2$ for $^\exists i$

§3 では、quasi-Gorenstein 特異点の good resolution について基本的な事柄を準備する。

§4では、純楕円型特異点をn個の型に分類しその good resolution を調べる。

§5では、すべての次元で、それぞれの型をもつ純楕円型孤立特異点を構成する。

Def. 1. resolution $f:\tilde{X}\to X$ が good resolution であるとは $E=f^{-1}(x)_{red}$ が simple normal crossings divisor になっているときをいう。

Def 2. partial resolution $f:\hat{X}\to X$ ([7]) が good partial resolution であるとは $E=f^{-1}(x)_{red}$ が pure dim. $n-1$ をもつ variety with simple normal crossings のときである。

§1. Du Bois 特異点達

この§では Du Bois が導入し Steenbrink が命名した Du Bois 特異点の概念を紹介する。

Prop. 1.1 (Du Bois [3]) 任意の$\mathbb{C}$上の algebraic variety V に

にフィルター付き analytic quasi-coherent sheaves の complex $(\underline{\Omega}^{\cdot}_{V}, F)$ で次を満たすものが存在する。(ここで filtration F は decreasing) そしてそれはフィルター付き derived category の中で unique である。

(1) $d : \underline{\Omega}^{i}_{V} \to \underline{\Omega}^{i+1}_{V}$ は first order differential operator で $\mathrm{Gr}_F \underline{\Omega}^{\cdot}_{V}$ への induced map は $\mathcal{O}_V$-linear;

(2) $\underline{\Omega}^{\cdot}_{V}$ は constant sheaf $\mathbb{C}$ の resolution であって、$\mathrm{Gr}_F \underline{\Omega}^{\cdot}_{V}$ の cohomology sheaves は coherent である;

(3) filtered complex の natural morphism
$$\rho : (\Omega^{\cdot}_{V}, \sigma) \to (\underline{\Omega}^{\cdot}_{V}, F)$$
が存在する。ただし $\Omega^{\cdot}_{V}$ は De Rham complex、σ は "stupid filtration" である。特に V : smooth のとき、ρ は quasi-isomorphism になる。

(4) V が complete のとき、$(\underline{\Omega}^{\cdot}_{V}, F)$ の hypercohomology の spectral sequence は E_1 で退化し、$H^k(V, \mathbb{C})$ 上の limit filtration は Deligne の Hodge filtration と一致する。

(5) $f : \tilde{X} \to X$ $\mathbb{C}$ 上 finite type の scheme 間の morphism であって、X の subscheme Y の外側では同型とする。$\tilde{Y}$ を Y の逆像とする。$f' : \tilde{Y} \to Y$ を f の $\tilde{Y}$ への制限とすると、filtred derived category の中で、次の triangle が存在。

$$0 \to \underline{\Omega}^{\cdot}_{X} \to \underline{\Omega}^{\cdot}_{Y} \oplus \mathbb{R}f_{*}\underline{\Omega}^{\cdot}_{\tilde{X}} \to \mathbb{R}f'_{*}\underline{\Omega}^{\cdot}_{\tilde{Y}} \to 0 .$$

Def. 1.2. 特異点 (X, x) が Du Bois

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ρ から induce される natural map $\mathcal{O}_{X,x} \to Gr^0_F \underline{\Omega}^{\cdot}_{X,x}$ が quasi-isomorphism

代数多様体 X が Du Bois

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X 上のすべての点が Du Bois

以後 $Gr^0_F \underline{\Omega}^{\bullet}_X$ を単に $\underline{\Omega}^0_X$ と表わそう ([11]の書き方に従った)

Prop. 1.3. D を complete algebraic scheme over $\mathbb{C}$ で高々 normal crossing singularities しか持たないとき、$Gr^0_F H^i(D, \mathbb{C}) \cong H^i(D, \mathcal{O}_D)$ ただしここで F は Deligne の Hodge filtration である。

[証明] [3] により、D は Du Bois variety。また D は complete だから Prop 1.1 の (4) を用いれば出る。

Prop. 1.4. X を variety S を reduced な閉 subscheme とする。S が Du Bois であると仮定しよう。今 $f: \tilde{X} \to X$ が S の外側で同型 で、$\tilde{X}$ も $\tilde{S} = f^{-1}(S)_{red}$ も Du Bois に

なるようにとる。$f' : \hat{S} \to S$ を f の $\hat{S}$ への制限とする。

⇒(i) すると、もし X が Du Bois なら canonical map

$\varphi_i : R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \to R^i f'_* \mathcal{O}_{\tilde{S}}$ は任意に $i>0$ に関し同型。

(ii) 特に X が normal なら、X が Du Bois であることと

φ_i が任意の $i>0$ に対し同型になり、$\mathcal{O}_S \to f'_* \mathcal{O}_{\tilde{S}}$

が同型になることと同値

[証明] Prop. 1.1 の (5) を morphism f に関して応用する。

$\tilde{X}$ も $\tilde{S}$ も S も Du Bois であるから次の long exact sequence が得られる

$$
\begin{aligned}
0 &\to \mathcal{H}^0 \underline{\Omega}^0_X \to f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \oplus \mathcal{O}_S \to f'_* \mathcal{O}_{\tilde{S}} \\
&\to \mathcal{H}^1 \underline{\Omega}^0_X \to R^1 f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \to R^1 f'_* \mathcal{O}_{\tilde{S}} \\
&\cdots\cdots \\
&\to \mathcal{H}^i \underline{\Omega}^0_X \to R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \to R^i f'_* \mathcal{O}_{\tilde{S}}
\end{aligned}
$$

定義より、X が Du Bois であることと $\mathcal{H}^0 \underline{\Omega}^0_X \simeq \mathcal{O}_X$, $\mathcal{H}^i \underline{\Omega}^0_X = 0$ ($\forall i>0$) は同値であるから、(i)(ii) はすぐわかる。

Cor. 1.5 (Steenbrink [11]) 正規孤立特異点 (X, x) に関し、

(X, x) は Du Bois $\Leftrightarrow$ $(R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x \to H^i(E, \mathcal{O}_E)$ は同型 $(i>0)$

ただし $f : \tilde{X} \to X$ は good partial resol.

で $\tilde{X}$ は Du Bois, $E = f^{-1}(x)_{red}$.

[証明] Eは正規交叉だから[3]によりDu Boisである。そこで Prop.1.4.を使えばよい。

Prop.1.6.(Steenbrink [11]) (X, x)を正規孤立特異点、$f: \tilde{X} \to X$ をgood resolution, $E = f^{-1}(x)_{red}$ とする。
このとき natural map $(R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x \to H^i(E, \mathcal{O}_E)$ $(i > 0)$ はsurjectiveである。

[証明] canonical maps による次の diagram が存在

$$
\begin{array}{ccc}
H^i(\tilde{X}, \mathbb{C}) & \xrightarrow[\beta]{\sim} & H^i(E, \mathbb{C}) \\
\alpha \downarrow & & \downarrow \delta \\
H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) & \xrightarrow[\gamma]{} & H^i(E, \mathcal{O}_{\tilde{X}})
\end{array}
$$

$\tilde{X}$はEにdeformation retractだから、βは同型。EはDu Boisだから $H^i(E, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \cong Gr_F^0 H^i(E)$ なのでδはsurjective。よってγはsurjectiveにならなければならない。

Cor.1.7. 孤立特異点がrationalならDu Boisである。

[証明] rational singularityはnormalだから、Cor.1.5が適用できる。任意の$i > 0$に対して surjection $(R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x \to H^i(E, \mathcal{O}_E)$ は $(R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x = 0$ なので同型になる。

一般に特異点 (X, x)（孤立とは限らない）が rational であることを $Rf_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} \cong \mathcal{O}_X$ in derived category と定義する。ただし $f: \tilde{X} \to X$ は特異点の resolution。
Steenbrink は conjecture として「すべての rational singularity は Du Bois?」を [11] において挙げている。筆者はこれに対する完全な答を知らない。そこで後に §5 で用いる肯定的な例をここで1つ挙げておく。

Example 1.8. $\mathbb{C}^n$ の中で方程式 $z_1z_2 - z_3 \cdots z_k = 0$ $(3 \leq k \leq n)$ で定義される多様体の特異点はすべて Du Bois で rational.
実際、rational になることはよく知られている（例えば [13]）。上記の多様体を X とする $f: \tilde{X} \to X$ を [13] で構成された resolution とすると、canonical map $R^if_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} \to R^if_*\mathcal{O}_E$ は両方が 0 なので同型。また $\mathcal{O}_S \to f_*\mathcal{O}_E$ も同型だから Prop 1.4 より X は Du Bois.

§2. 多重種数と Du Bois 条件

この § においては (X, x) はすべて n 次元 $(n \geq 2)$ 正規孤立特異点とする

Def 2.1 ([14]) (X, x) に対し多重種数 $\{\delta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ を次の様に定義する。

$$\delta_m(X, x) = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X - \{x\}, \mathcal{O}(mK)) / L^{2/m}(X - \{x\}).$$

ただし $L^{2/m}(X - \{x\})$ は $X - \{x\}$ 上の $L^{2/m}$-可積分な m 重の holomorphic n-form の集合。

Prop. 2.2 ([14]) $f: \tilde{X} \to X$ を特異点 (X, x) の good resolution とする。例によって $E = f^{-1}(x)_{red}$ と書くと

$$\delta_m(X, x) = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}})) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E))$$

Def. 特異点 (X, x) が Gorenstein 特異点であるとは $\mathcal{O}_{X,x}$ が Gorenstein 環になるときをいう。

ここで (X, x) が Gorenstein 特異点になることと、(1) ω_X が invertible でかつ (2) $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$ $(0 < {}^\forall i < n-1)$ が任意の resolution $f: \tilde{X} \to X$ について成立すること 同値である。

Def. (X, x) が quasi-Gorenstein 特異点であるとは ω_X が invertible になるときをいう。

Theorem 2.3. $f: \tilde{X} \to X$ を quasi-Gorenstein 特異点 (X, x) の good resolution とする。$E = f^{-1}(x)_{red}$ とし $E = \sum E_i$

と、既約成分に分解しておく。すると次の三条件は同値である。

(i) $\delta_m(X.x) \leq 1$ for any $m \in \mathbb{N}$

(ii) $(X.x)$ は Du Bois である。

(iii) $K_{\tilde{X}} = f^*K_X + \sum m_i E_i$ ここで $m_i \geq -1$ for $\forall i$

証明は2つの部分に分けてなされる。

Lemma 3.2.1 定理の仮定の下で次の三条件は同値。

(i) $\delta_m(X.x) \leq 1$ for any $m \in \mathbb{N}$

(ii)′ $H^{n-1}(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \simeq H^{n-1}(E, \mathcal{O}_E)$ isomorphic

(iii) $K_{\tilde{X}} = f^*K_X + \sum m_i E_i$ ここで $m_i \geq -1$ for $\forall i$

[Lemmaの証明] (ii)′ ⇒ (iii) ⇒ (i) ⇒ (ii)′ の順で証明しよう。

(ii)′が成立しているとまず仮定する。等式;

(1) $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}} + E)) = \Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$

が成立することを示そう。$\subset$ は明らかである。よって

(2) $\dim \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}+E)) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) \leq \dim \Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$

が成立する。ここで等号が成立することと、(1)の等号が成立することは同値であることに注意しておく。

(2)の左辺は adjunction formula と Grauert-Riemenschneiderの消滅定理($H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))=0 \quad i>0$)を用いれば、$h^0(E, K_E)$ に等しくなる。

これはSerreの双対定理より $h^{n-1}(E, \mathcal{O}_E)$ と等しい。
一方(2)の右辺は Siu の定理とSerreの双対定理を用いれば $h^{n-1}(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ に等しくなる。(iii)′の条件より (2) の等式が成立し、よって (1) も成立する。必要があればXをさらに小さくとって $\mathcal{O}(K_X)$ が trivial になっているとしてよい。この生成元をωと表わすと、等式(1)の両辺に ω^{-1}をかけることによって、等式；

(3) $$\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\Sigma(m_i+1)E_i)) = \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

が得られる。したがって $m_i \geq -1$ for $\forall i$ が成立((iii) ok)

次に(iii)を仮定しよう。すると包含関係；

$$\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(f^*K_X - E)) \subset \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$$

が成立する。$\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(f^*K_X)) = \Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$ であるので、上記の包含関係より surjective map

$$\Gamma(E, \mathcal{O}_E) = \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(f^*K_X)) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(f^*K_X - E)) \longrightarrow \Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$$

が得られる。Xはnormalだから $h^0(E, \mathcal{O}_E) = 1$。したがって上のsurjectionより $1 \geq p_g(X, x)$。もし $p_g(X, x) = 0$ なら [14] より $\delta_m(X, x) = 0$ ($\forall m \in \mathbb{N}$) だから(i)をみたす。$p_g(X, x) = 1$ と仮定しよう。すると $\tilde{X}$ 上に meromorphic n-form θ で E上に1位の極をもつものがあって $\Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) = \langle\theta\rangle \oplus \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$ をみたす。ただした

III は $\mathbb{C}$-vector spaces の直和。 $m>1$ に対して $\Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(mK))$ は $\{\theta^a g_1 \cdots g_{m-a} \mid g_i \in \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))\}$ で $\mathbb{C}$ 上生成される。
θ の E での pole の位数は 1 だから, $a<m$ に対して
$\theta^a g_1 \cdots g_{m-a} \in \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}}+(m-1)E))$。 よって $\Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(mK))$ $=\langle\theta^m\rangle \oplus \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}}+(m-1)E))$. Prop 2.2 より $\delta_m(X, x)=1$ ($\forall m \in \mathbb{N}$)

最後に (i) を仮定して (iii)′ を示そう。(X, x) が rational のときは, Cor 1.7 により Du Bois だから (iii)′ は当然成り立つ。
(X, x) を純楕円型と仮定しよう。E で pole をもつような meromorphic n-form θ をとると, 仮定より

$$\Gamma(\hat{X}-E, \mathcal{O}(mK))=\langle\theta^m\rangle \oplus \Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}(mK+(m-1)E)).$$

ここで θ は E で order 1 の pole をもつことがわかる。
実際, θ の E での pole の order を s とする。すると任意の holomorphic n-form g に対し, $\theta^{m-1} \cdot g \in \Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}(mK+(m-1)E))$ でなければならない。よって g は少くとも $(s-1)(m-1)$ 位の零を E 上で持つことになる。m は任意であったから, $s=1$ でなければならない。

これにより, $\Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}(K+E))=\Gamma(\hat{X}-E, \mathcal{O}(K))$ がわかる。
よって, $h^{n-1}(E, \mathcal{O}_E)=h^0(E, K_E)=\dim \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K+E)) / \Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}(K_{\hat{X}})) = P_g(X, x)=1$

したがって canonical な surjective map $\underset{\mathbb{C}}{\overset{\shortparallel}{H^{n-1}(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})}} \to \underset{\mathbb{C}}{\overset{\shortparallel}{H^{n-1}(E, \mathcal{O}_E)}}$ は同型。(QED Lemma 2.3.1)

Lemma2.3.1により (i)⇔(iii)⇐(ii) が示されたので、あとは (i),(iii)⇒(ii) を示せばよい。

Lemma 2.3.2. 定理の仮定の下で、(iii) $K_{\tilde{X}}=f^*K_X+\sum m_i E_i$ ($m_i \geq -1$ for $\forall i$) が成立しているとすると (X,x) はDu Bois.

[Lemma 2.3.2の証明] "(iii)⇒(ii)' $H^{n-1}(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \simeq H^{n-1}(E,\mathcal{O}_E)$" は、上のLemmaで証明されているので $0<i<n-1$ に対し

$H^i(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \to H^i(E,\mathcal{O}_E)$ が単射であることをいえば、Prop. 1.6 により同型であることが導びかれ、Cor. 1.5 により (X,x) はDu Bois になる。(X,x) がrationalのとき、Du Bois になることはわかっているので、(X,x) を純楕円型としよう。すると $\tilde{X}-E$ 上で non-vanishing holomorphic で E 上で1位の pole をもつ n-form ω が存在するので (Lemma 2.3.1)、ω をカップ積することにより、層準同型

$$\mathcal{O}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E)$$

が得られ、よって、無限遠点に台をもつコホモロジー群を含む可換図

$$\begin{tikzcd}
\to H^i_c(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\beta_i"] & H^i_\infty(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_i"] & H^{i+1}_c(\mathcal{O}) \arrow[d] \\
\to H^i_c(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E)) \arrow[r] & H^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E)) \arrow[r, "\mu_i"'] & H^i_\infty(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E)) \arrow[r] & H^{i+1}_c(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E))
\end{tikzcd}$$

が成り立つ。ここでβ_iは単射になる。実際、Grauert-Riemenschneiderの消滅定理とSerreの双対定理より、すべての$i<n$について $H^i_c(\mathcal{O}_{\tilde{X}})=0$。したがって$\psi_i$は$i<n-1$について全単射、しかも$\omega$は$\tilde{X}$上$\tilde{X}-E$では到るところ0とならないので、$\gamma_i$も全単射である。よって可換式 $\gamma_i\circ\psi_i=\mu_i\circ\beta_i$ より、β_iは単射である。

次に以下の可換図

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\tilde{X}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K) \arrow[r] & \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K+E) \arrow[r] & \mathcal{O}_E(K_E) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

より、コホモロジー群の可換図

$$
\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H^i(\mathcal{O}(-E)) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "\beta_i"] & H^i(\mathcal{O}_E) \arrow[d, "\alpha_i"] \\
\arrow[r] & H^i(\mathcal{O}(K)) \arrow[r] & H^i(\mathcal{O}(K+E)) \arrow[r, "v_i"'] & H^i(K_E)
\end{tikzcd}
$$

が得られる。Grauert-Riemenschneiderの消滅定理より、$i>0$ について、$H^i(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K))=0$ したがってv_iは全単射である。よって可換式 $\alpha_i\circ u_i=v_i\circ\beta_i$ より、β_iが単射であったから$v_i\circ\beta_i$も単射。ゆえにu_iも単射となる。(QED of Lemma 2.3.2
QED of Th. 2.3)

§3. 正規孤立 quasi-Gorenstein 特異点の good resolution.

この§では (X, x) は常に正規孤立 quasi-Gorenstein 特異点とし. $f: \widetilde{X} \to X$ を good resolution とする。$E = f^{-1}(x)_{red}$ とおき. E の dual graph を Γ_E と表わす。simplicial complex Γ_E の i-th Betti number を $b_i(\Gamma_E)$ と表わす。

Proposition 3.1. 任意の $i \geq 0$ に対して等式;
$$b_i(\Gamma_E) = \dim_{\mathbb{C}} W_0 H^i(E)$$
が成立する。ただし W は $H^i(E, \mathbb{C})$ 上の mixed Hodge structure の weight fillration.

[証明] E は simple normal crossings であるから. mixed Hodge structure の weight fillation の定義により明らか

Prop. 3.2. 任意の $i \geq 0$ に対して不等式;
$$b_i(\Gamma_E) \leq \dim_{\mathbb{C}} (R^i f_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}})_x$$
が成立する。ここで任意の $i > 0$ に対して等号が成立しているとすると. (X, x) は Du Bois になる。

[証明] Prop 1.6 により. $\dim_{\mathbb{C}}(R^i f_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}})_x \geq h^i(E, \mathcal{O}_E)$ がすべての $i > 0$ について成立する。一方で Prop 1.3 と

Prop 3.1 により. $h^i(E,\mathcal{O}_E)=\dim Gr_F^0 H^i(E)\geq \dim W_0H^i(E)=b_i(\Gamma_E)$.
2つの不等式をつなげてやれば. 最初の主張が示される。
等号が成立するとき. 等号 $\dim(R^if_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})_x=h^i(E\,\mathcal{O}_E)$ が得られるので. Prop. 1.6 により. $R^if_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}\simeq H^i(E\,\mathcal{O}_E)$ が導かれる。

Def. 3.3. quasi-Gorenstein 特異点 $(X.x)$ の good resolution $f:\tilde{X}\longrightarrow X$ に対して. $K_{\tilde{X}}=f^*K_X+\sum_{i\in I}m_iE_i-\sum_{j\in J}m_jE_j$; $m_i\geq 0\ (i\in I)$ $m_j>0\ (j\in J)$ と表わされているとき.
$\sum m_jE_j$ を f の essential divisor と呼ぶ.

Remark 3.4. $(X.x)$ が rational のとき. essential divisor は空集合, 純楕円型のとき. essential divisor は reduced になる。

Def. 3.5. good resolution $f:\tilde{X}\to X$ が essential good resolution であるとは. $K_{\tilde{X}}=f^*K_X+\sum_\alpha m_\alpha E_\alpha$; $m_\alpha\leqq 0$ と表わされることである. (=0を許していることに注意)

Remark 3.6. $(X.x)$ が2次元の場合は. essential good resolution は必ず存在することがわかっている. しかし高次

元になるとそれは正しくない。例えば3次元のcDV特異点([7])はすべてのgood resolutionがessentialにならない。
$\tilde{X}$にmildな特異点(具体的にはterminal特異点)を許せば"essential good resolution"は存在するであろうと予想される。
以下にgood resolutionにおいてessential divisorが本当に"essential"な役割をになっていることを見よう。

Prop 3.7. $f: \tilde{X} \longrightarrow X$ をquasi-Gorenstein特異点のgood resolutionとする。E_Jをfのessential divisorとしよう。すると、次が成り立つ。

(1). $D \geq E_J$となる任意のdivisor Dに対し $h^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = p_g(X, x)$

(2). E_Jのcomponentを全く含まないeffective divisor Dに対して $h^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = 0$

[証明] $D \geq E_J$となるdivisor Dをとると、E_Jの定理から、$\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_X+D)) = \Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}}))$。
Grauert-Riemenschneiderの消滅定理により $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}(K_{\tilde{X}})) = 0$。
よって
$$p_g(X, x) = \dim \Gamma(\tilde{X}-E, \mathcal{O}(K)) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K)) = \dim \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K+D)) / \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(K))$$
$$= \dim \Gamma(D, \mathcal{O}(K_D))$$
$$= \dim H^{n-1}(D, \mathcal{O}_D)$$ (1)の証明終)

次に D を E_J の component を全く含まない effective な divisor とする。 $D' = E_J + D$ とすると D' は(1)の条件を満たす。D の仮定により $E_J \cap D$ の次元は $n-2$ 以下であるから 下の φ は 全射となる。

$$H^{n-1}(D', \mathcal{O}_{D'}) \xrightarrow{\varphi} H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \oplus H^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) \to \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{H^{n-1}(E_J \cap D, \mathcal{O})}$$

E_J, D' に対して (1) の結果を用いれば この φ は $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ への同型 になる。 よって $H^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = 0$

Prop. 3. 8. 上の 3.7 と同様の仮定のもとで, $D \lneqq E_J$ となる 任意の effective divisor D に対して

$$h^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) \lneqq p_g(X, x)$$

[証明] $E_J = D + D'$ と分解しよう ($D' > 0$).
Adjunction formula を用いれば次の exact sequence が得られる

$$0 \to K_D \longrightarrow K_{E_J} \longrightarrow K_{E_J}|_{D'} \to 0$$

E_J の定義により $K_{E_J} \geq 0$. よって global section の map $\Gamma(E_J, K_{E_J}) \longrightarrow \Gamma(D', K_{E_J}|_{D'})$ は zero map でない
したがって canonical injection $\Gamma(D, K_D) \to \Gamma(E_J, K_{E_J})$ は 全射にならない。 Serre の双対性より命題が得られる。

Cor. 3.9. (X, x) を純楕円型 quasi-Gorenstein 特異点とし $f: \tilde{X} \to X$ を good resolution とすると、essential divisor E_J は connected である。E_J が irreducible でないとき、$D \lneqq E_J$ となるような任意の effective divisor D に対し、$H^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = 0$ となる。

[証明] $p_g(X, x) = 1$ であるから才2の主張は 3.8 より明らか。E_J が irreducible でないとしよう。$E_J = D_1 + D_2$ $(D_1, D_2 > 0)$ と分解しよう。$D_1 \cap D_2 = \phi$ とすると

$$\underset{\overset{\|}{0}}{H^{n-2}(D_1 \cap D_2, \mathcal{O}_{D_1 \cap D_2})} \to H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \xrightarrow{\varphi} H^{n-1}(D_1, \mathcal{O}_{D_1}) \oplus H^{n-1}(D_2, \mathcal{O}_{D_2}) \to \underset{\overset{\|}{0}}{H^{n-1}(D_1 \cap D_2, \mathcal{O})}$$

より φ が同型になる。先に示したことより、$\oplus H^{n-1}(D_i, \mathcal{O}_{D_i}) = 0$ となるはずであるから これは矛盾

§4. 純楕円型特異点の分類

$f: \tilde{X} \to X$ を純楕円型特異点 (X, x) の good resolution とする。E_J を f の essential divisor としよう。
E_J は simple normal crossings だから Prop. 1.3 より、

$$H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \cong Gr_F^0 H^{n-1}(E_J) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} H^{0,i}_{n-1}(E_J)$$

Prop. 3.7 より $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) = \mathbb{C}$ であるから $Gr_F^0 H^{n-1}(E_J)$ は いずれかひとつの $H^{0,i}_{n-1}(E_J)$ と一致する。

Def. 4.1. 純楕円型特異点 (X, x) が $(0, i)$ 型である $(i = 0, 1, 2 \cdots, n-1)$ とは $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ が $(0, i)$-Hodge component から成っているときをいう。

ここで $H^{n-1}(E, \mathcal{O}_E) \to H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ は同型であるから $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ が $(0, i)$-Hodge comp から成っていることと $H^{n-1}(E, \mathcal{O}_E)$ が $(0, i)$-Hodge component から成っていることは同値であることに注意。

Prop. 4.2. 上で定義した純楕円型特異点 (X, x) の型は good resolution $f : \tilde{X} \to X$ のとり方に依らない。

[証明] $f_i : X_i \to X$ $(i = 1, 2)$ を (X, x) の good resolutions とする。$f_i^{-1}(x)_{red} = E_i$ と書こう。birational morphism $g : X_1 \to X_2$ が存在する場合に証明すれば十分である。さて、完備化をすることにより X_i は完備だと思ってよい。E_i の外側で g は同型だから、次の mixed Hodge structure の exact sequence が得られる。

$$\to H^{n-1}(X_2,\mathbb{C}) \to H^{n-1}(X_1,\mathbb{C}) \oplus H^{n-1}(E_2,\mathbb{C}) \to H^{n-1}(E_1,\mathbb{C}) \to$$

Gr_F^0 をとることにより次の exact sequence が得られる

$$\to H^{n-1}(X_2,\mathcal{O}_{X_2}) \to H^{n-1}(X_1,\mathcal{O}_{X_1}) \oplus H^{n-1}(E_2,\mathcal{O}_{E_2}) \xrightarrow{\varphi} H^{n-1}(E_1,\mathcal{O}_{E_1}) \to H^{n}(X_2,\mathcal{O}_{X_2})$$

X_i $(i=1,2)$ は non-singular で complete だから $H^j(X_i,\mathcal{O}_{X_i})$ は $(0,j)$-component からなる。 $H^{n-1}(E_1,\mathcal{O}_{E_1})$ は $(0,n)$-comp. をもたないので φ は surjective. もし $H^{n-1}(E_1,\mathcal{O}_{E_1})$ が $(0,i)$-type $(i \lneq n-1)$ なら φ の surjectivity から、それは $H^{n-1}(E_2,\mathcal{O}_{E_2})$ からきていなければならないので $H^{n-1}(E_2,\mathcal{O}_{E_2})$ も $(0,i)$-type になる。 もし $H^{n-1}(E_1,\mathcal{O}_{E_1})$ が $(0,n-1)$-type とする。ここで $H^{n-1}(E_2,\mathcal{O}_{E_2})$ が異なる type ならその φ による像は 0 になるので $H^{n-1}(X_2,\mathcal{O}_{X_2})$ に $(0,n-1)$-comp でないものが存在しなければならないことになるので矛盾.

Theorem 4.3　$f: \widetilde{X} \to X$ を孤立楕円型特異点 (X,x) の essential good resolution とする. (X,x) が $(0,s)$ 型とすると, essential divisor E_J の dual graph Γ_{E_J} は $(n-s-1)$ 次元の単体的複体になる. (ただし単体的複体 Γ の次元とは, Δ に含まれる単体の次元の最大値のことである)

Theorem の証明のために Lemma を1つ準備しよう(易しいので証明は省く)

Lemma 4.5. D を1次元の完備連結多様体で simple normal crossings であるとする。$K_D \cong \mathcal{O}_D$ とすると、

(0) $H^1(D, \mathcal{O}_D)$ が $(0,0)$-Hodge-component から成っているとき D は rational curves の cycle である。

(1) $H^1(D, \mathcal{O}_D)$ が $(0,1)$-Hodge-component から成っているとき D は irreducible elliptic curve である。

[Th 4.3 の証明] $E(r, s)$ を non-singular な $(r+1)$-fold X の完備連結な effective divisor で simple normal crossings で、$K_D \cong \mathcal{O}_D$, $H^r(D, \mathcal{O}_D) = \mathbb{C}$ は $(0, s)$-Hodge-component からなっているもの全体の集合とする。E_J は $E(r-1, s)$ の元であることに注意すれば $E(r, s)$ の勝手な元 D に対し dual graph Γ_D が $(r-s)$ 次元であることを示せばよい。

r に関する帰納法で示そう。

$r=1$ のときは Lemma 4.5 より明らか。

$r>1$ として、$E(r-1, s)$ $(s \leqq r-1)$ のすべての元に対し主張が成立しているとする。$E(r, r)$ の元はすべて irreducible であることをまず示そう。

$D\in E(r,r)$ が irreducible でないとする。$D=D'+D''$ を自明でない分解とする($D',D''>0$)。Mayer-Vietoris から induce される exact sequence

$$H^{r-1}(D'\cap D'',\mathcal{O}_{D'\cap D''})\to H^r(D,\mathcal{O}_D)\xrightarrow{\psi}H^r(D',\mathcal{O}_{D'})\oplus H^r(D'',\mathcal{O}_{D''})$$

において $H^r(D,\mathcal{O}_D)$ は $(0,r)$-Hoge component から成っているが $H^{r-1}(D'\cap D'',\mathcal{O}_{D'\cap D''})$ にはそのような component は存在しない。したがって ψ は単射になる。ところが $H^r(D',\mathcal{O}_{D'})$, $H^r(D'',\mathcal{O}_{D''})$ は Cor 3.9 と同じ議論により 0 になるので矛盾。

$s<r$ と仮定しよう。$D\in E(r,s)$ に対し D_j を D の1つの irreducible component とし $D_j'=D-D_j$ とおく。$D_j'|_{D_j}$ を連結成分 C_i ($i=1\cdots t$) に分解する。すると adjunction formula により $K_{D_j}=-\sum_{i=1}^{t}C_i$ かつ $K_{C_i}\cong\mathcal{O}_{C_i}$ が成立する。ここで Mayer-Vietoris から induce される exact sequence を考えよう。

$$H^{r-1}(D_j,\mathcal{O}_{D_j})\oplus H^{r-1}(D_j',\mathcal{O}_{D_j'})\xrightarrow{\rho}\bigoplus_{i=1}^{t}H^{r-1}(C_i,\mathcal{O}_{C_i})\to \underset{\underset{\mathbb{C}}{\parallel}}{H^r(D,\mathcal{O}_D)}\to 0$$

$H^r(D,\mathcal{O}_D)$ は $(0,s)$-Hodge-comp から成りたっているので $H^{r-1}(C_i,\mathcal{O}_{C_i})$ ($i=1\cdots t$) のいずれか1つは $(0,s)$-type でなければならない。それを $H^{r-1}(C_t,\mathcal{O}_{C_t})$ とします。$t=1$ の場合は帰納法の仮定より $D_j'|_{D_j}=C_1$ の dual graph の次元は $r-1-s$ であるから D_j は Γ_D の中で $r-s$ 次元の単体の頂点となり

それより大きい次元の単体の頂点にはなり得ないことがわかる。

$t > 1$ としよう。ρ を $H^{r-1}(D_j, \mathcal{O}_{D_j})$ に制限した map を ρ' と表そう

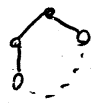
$$0 \longrightarrow K_{D_j} = \mathcal{O}_{D_j}(-\textstyle\sum C_i) \longrightarrow \mathcal{O}_{D_j} \longrightarrow \mathcal{O}_{\sum C_i} \longrightarrow 0$$

なる exact sequence より、

$$H^{r-1}(D_j, \mathcal{O}_{D_j}) \xrightarrow{\rho'} \bigoplus_{i=1}^{t} H^{r-1}(C_i, \mathcal{O}_{C_i}) \longrightarrow \underset{\mathbb{C}}{\underset{\|}{H^r(D_j, K_{D_j})}} \longrightarrow \underset{0}{\underset{\|}{H^r(D_j, \mathcal{O}_{D_j})}}$$

が導びかれるが、これにより $\mathrm{Im}\,\rho'$ は $t-1$ 次元であることがわかる。$\mathrm{Im}\,\rho' \leq \mathrm{Im}\,\rho$ であったが、双方の次元が等しくなったので $\mathrm{Im}\,\rho' = \mathrm{Im}\,\rho$. $H^{r-1}(D_j, \mathcal{O}_{D_j})$ には $(0, r-1)$-Hodge-component しかないので $\mathrm{Im}\,\rho$ も $(0, r-1)$-Hodge-component しかもたない。よって $H^{r-1}(C_i, \mathcal{O}_{C_i})$ $(i<t)$ は $(0, i)$ 型で $H^{r-1}(C_t, \mathcal{O}_{C_t})$ は前にみたように $(0, s)$ 型。帰納法の仮定により $\Gamma_{C_i}(i<t)$ は one point Γ_{C_t} は $(r-1-s)$ 次元になる。よって D_j は Γ_D の中で $r-s$ 次元の単体の頂点となり、それより大きい次元の単体の頂点にはなり得ない　(Q.E.D.)

Example　$n=2$ のとき

				E_J		Γ_{E_J}	
(X,x) 純楕円型 $\Leftrightarrow$	simple elliptic	$\Leftrightarrow$ $(0,1)$ 型	$\Leftrightarrow$	a non-sing elliptic curve	$\Leftrightarrow$	$\cdot$	0次元
	cusp	$\Leftrightarrow$ $(0,0)$ 型	$\Leftrightarrow$	rational curves of cycle	$\Leftrightarrow$		1次元

Theorem 4.6. (X, x) を3次元純楕円型 quasi-Gorenstein 特異点、$f: \hat{X} \to X$ を essential good resolution、E_J を f の essential divisor とする。

すると E_J (あるいは dual graph Γ_{E_J}) は次のいずれか

型 \ $R^1f_*\mathcal{O}_{\hat{X}}$	0	2	----	$2g$	---
0,2	Γ_{E_J}; ○ a K3-surface	Γ_{E_J}; ○ an Abelian surface	—	—	—
0,1	Γ_{E_J}; ●─○─···─○─● ●; rat. surface ○: elliptic ruled —; elliptic curve	Γ_{E_J}: ○: elliptic ruled —: elliptic curve	—	—	—
0,0	Γ_{E_J}: S^2の単体分割 ○: rat surface —: rat curve	Γ_{E_J}: T^2の単体分割 ○: rat surface —: rat curve	....	Γ_{E_J}: genus g のリーマン面の単体分割 ○: rat surface —: rat curve	...

ただし — は存在しないことを示す。

[証明] E_J は simple normal crossings で $K_{E_J} \cong \mathcal{O}_{E_J}$ になることに注意する。E_J が irreducible のとき当然 (0,2) type となり、曲面の分類論より K3 か又は Abelian になることがわかっている。$\dim R^1f_*\mathcal{O}_{\hat{X}} = h^1(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ だから

その値はそれぞれ 0, 2 となる。

E を irreducible でないとしよう. adjunction formula により. $K_{E_i} = -\sum_{j\neq i} E_j|_{E_i}$. $C = \sum_{j\neq i} E_j|_{E_i}$ とおくと $K_C \cong \mathcal{O}_C$ となる。Lemma 4.5 より. C の connected component は. elliptic curve か又は. rational curves の cycle であることがわかる。 [6] の P. 967 と [12] の Lemma 2 を用いれば. 組 (E_i, C) は次のいずれかになることがわかる。

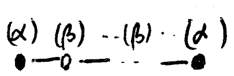
(α) E_i : rational surface　C : elliptic curve 1本.

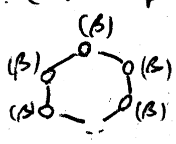
(β) E_i : elliptic ruled surface　C : elliptic curves 2本の disjoint union

(γ) E_i : rational surface　C : rational curves a cycle 1個

ここで Cor 3.9 により. 次の exact sequence がある

$$H^1(E_i, \mathcal{O}) \oplus H^1(\sum_{j\neq i} E_j, \mathcal{O}) \to H^1(C, \mathcal{O}_C) \to H^2(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \to 0$$

よって $H^2(E, \mathcal{O}_E)$ が (0,1)-型なら $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ も (0,1) 型の comp を含まねばならず Lemma 4.5 より (α) か (β) のいずれかになる. したがって Γ_{E_J} は 

又は 

のいずれかになる.

$R^1 f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = h^1(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ の計算はやさしい.

$H^2(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ が (0,0) 型なら $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ も (0,0) 型の comp を含まねば

ならず. Lemma 4.5より E_Jのすべての component は(γ)の型である. よって Γ_{E_J} は boundary のない compact surface になる. ここで $H^2(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ は$(0,0)$型だから $W_0H^2(E_J)\cong\mathbb{C}$ よって $b_2(\Gamma_{E_J})=1$ したがって Γ_{E_J} は orientable になる.

§5. 純楕円型特異点の構成

この§では高次元の purely elliptic singularity の例を blow up blowdown により構成する。

Lemma 5.1. Y を normal Gorenstein variety で高々 rational Du Bois 特異点しかもっていないとする. E を Y 上の compact connected な effective divisor で simple normal crossing になっているとする. $K_Y=-E$ と仮定する.

Eが exceptional であるとき, それを contract してできた特異点 (X,x) は purely elliptic quasi-Gorenstein 特異点である

[証明] まず $H^i(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y))=0$ for $i>0$ を示そう.

$f: Y\to X$ を contraction morphism とし $g:\tilde{X}\to Y$ を Y の singularities の resolution とする. ($\tilde{X}$は強擬凸と思ってよい)

すると Grauert-Riemenschneider vanishing theorem を用いれば $H^i(\hat{X}, \mathcal{O}(K_{\hat{X}}))=0$ $R^i g_* \mathcal{O}(K_{\hat{X}})=0$ $(i>0)$ が成立

したがって spectral sequences

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q g_* \mathcal{O}(K_{\hat{X}})) \Rightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(\hat{X}, \mathcal{O}(K_{\hat{X}})) = 0$$

は E_2 で degenerate して $H^i(Y, g_* \mathcal{O}(K_{\hat{X}})) = 0$ $(i>0)$ となる。

Y は rational singularity 達しかもたないので $g_* \mathcal{O}(K_{\hat{X}}) = \mathcal{O}(K_Y)$。

$\mathcal{O}(K_Y) \cong \mathcal{O}(-E)$ なので $H^i(Y, \mathcal{O}_Y(-E)) = 0$ $(i>0)$ が得られた

したがって $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) \cong H^i(E, \mathcal{O}_E)$ for $i>0$.

よって Prop 1.4 より. (X, x) は non-rational ($\because H^{n-1}(E, \mathcal{O}_E) = \mathbb{C}$ より) な Du Bois singularity である。あとは quasi-Gorenstein であることをいえばよい. $K_Y = -E$ であるから $\Gamma(Y-E, \mathcal{O}(K_Y)) \simeq \Gamma(Y-E, \mathcal{O}_Y)$ これは f によって同型 $\Gamma(X-\{x\}, \mathcal{O}(K)) \simeq \Gamma(X-\{x\}, \mathcal{O})$ にうつる。これにより $X-\{x\}$ 上に non-vanishing な holomorphic n-form が存在する。

Lemma 5.2. Z を non-singular n-fold, $E_0 \subset Z$ を connected で射影的な simple normal crossing な divisor で $K_Z = -E_0$ を満たすとする. $\mathcal{L}$ を E_0 上の divisor で $\mathcal{L} \otimes \mathcal{N}_{E_0/Z}^{-1}$ が ample になるとする。

$|\mathcal{L}|$ の general member C で Z を blow up したものを Y, E_0 の proper transform を E とすると Y, E は Lemma 5.1 の条件を満たす。

[証明] C を general にとれば、C は E_0 の各 component 上では non-singular であって singular points は $\overbrace{z_1\cdots z_k=0}^{\text{Zの中で}}$ $z_n=0$ $(k<n)$ という2つの方程式で定義されていると思ってよい。したがってこのような center での blow up Y は $x_{n+1}x_n - x_1\cdots x_k = 0$ で定義される singularity をもつが、これは Example 1.8 により rational Du Bois である。$E \to E_0$ は E_0 の Cartier divisor による blow up だから同型になる。したがって E も simple normal crossing variety になる。また $K_Y = b^*K_Z + D$ ただし $b: Y \to Z$ は C を center とする blowing up. D はその exceptional divisor. ここで D が reduced になる理由は codimension 2 で general には non-singular な center による blow up だからである。よって $K_Y = -E - D + D = -E$. また $N_{E/Y} \cong N_{E/Z} - C$ であるから negative. よって E は Y の中で exceptional になる([5]). これで Lemma 5.1 の条件はすべて満たされた。

以上のことにより simple normal crossing variety E_0 で pure dimension $(n-1)$ のものが non-singular n-fold Z に $K_Z=-E_0$ となるようなうめこみがあれば、それを適当な center で blow up blow down して、純楕円型特異点が構成できることがわかった。以下で具体的に構成してみよう。

Example 5.3. $H\subset\mathbb{P}^n$ を degree $n+1$ の hypersurface で degree 1 の component $n-s-1$ 個と degree $s+2$ の irreducible component 1 個との和で simple normal crossing とする。$C=H\cap H_d$ とおく。ただし H_d は general な degree $d\geq n+2$ の hypersurface。すると $\mathbb{P}^n\supset H\supset C$ は Lemma 5.2 の条件をすべてみたすから blow up + blow down により、純楕円型特異点が得られる。exceptional divisor の Hodge type は H の Hodge type と同じだから得られた特異点は $(0,s)$ 型であることがわかる(これについては証明を略す. cf. [15]) これにより任意の $n\geq 2$ と $0\leq s\leq n-1$ に対して n 次元 $(0,s)$ 型純楕円型特異点が存在することがいえる。ただしこうして作られたものは $H^i(H,\mathcal{O}_H)$ の計算により、すべて Gorenstein になることがわかる。

Example 5.4 D_1を non-singular elliptic curve. D_2を$\mathbb{P}^2$の中の general position にある3本の lines の和とすると $E = D_1 \times D_2 \subset D_1 \times \mathbb{P}^2 = Z$, E上の適当な ample divisor C で blow up blow down してやれば 3次元の純楕円型特異点で (0,1)型で $R^1 f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ の次元が2になるものが得られる。上で D_2 を non singular な degree 3 の curve にとりかえてやれば 同じやり方で 純楕円型の(0,2)型特異点で $R^1 f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ の次元が2であるものが得られる もちろん Abelian surface を negative line bundle の zero section として埋込み それをつぶして作る方法でも得られる。

これらにより (Th 4.6. であげた) E_J の各々の型に対応する3次元の純楕円型特異点が存在することがいえた.

型	0	2	----	2g	---
0.2	Example 5.3	Ex 5.4			
0.1	Example 5.3	Ex 5.4			
0.0	Ex. 5.3	工藤[16]	--[16]--	[16]	---- [16]

<u>Remark 1</u> non-degenerate な hypersurface 特異点が純楕円型になるかどうかは, その Newton 境界が $(1,\cdots,1)$ を通るか否かで判定される. さらに詳しく $(0,s)$ 型になるのはどのような場合かをやはり Newton 境界の言葉で判定できればおもしろいと思われる.

$\{f=0\}$ で定義された純楕円型特異点 (X,x) について

(X,x) が $(0,s)$ 型 $\iff$ f の Newton 境界で $(1,\cdots,1)$ を通る face の次元が s 次元.

という予想があるが, これは一般には未だ open である. しかし, Newton 境界が単体的複体になっているような f に関しては正しいことが証明されている(飯田[17])

<u>Remark 2</u> Example 5.4 と, 渡辺の示した Lemma 2.3.2 以外は, 石井の [15] のひきうつしである. そのため命題等の番号がとんでしまったことをおわびする. 証明は [15] より詳しく書いたつもりである.

<u>Remark 3.</u> Th 2.3 は $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点(rK が Cartier divisor になる, CM 条件は仮定しない)に対しても成立する.

REFERENCES

1 Deligne, P.: Théorie de Hodge II, III. Publi. Math. I.H.E.S., 40, 5-58 (1971), 44, 5-78 (1974).

2 Dolgachev, I.: Cohomologically insignificant degenerations of algebraic varieties. Compositio Math., 42, 279-313 (1981).

3 Du Bois, P.: Complexe de de Rham filtré d'une variété singulière. Bull. Soc.math. France 109, 41-81 (1981).

4 Friedman,R.: Global smoothings of varieties with normal crossings. Annals of Math. 118, 75-114 (1983).

5 Grauert, H.: Über modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Annalen 146, 331-368 (1962).

6 Kulikov, V.: Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces. Math. USSR Izvestija 11, 957-989 (1977).

7 Reid, M.: Canonical 3-folds. Proc. Conf. Alg. Geom., Angers ed. A Beauville, Sijithoff and Nordhoff. (1979).

8 ——— : Minimal models of canonical 3-folds. Symposia in Math. 1 Kinokuniya-North Holland (1981).

9 Schmid, W.: Variation of Hodge structures; the singularities of

the period mapping. Inv. Math. 22, 211-319 (1973).

10 Steenbrink, J.: Cohomologically insignificant degenerations. Compositio Math., 42, 315-320 (1981).

11 ——— : Mixed Hodge structures associated with isolated singularities. Proc. Sym. in Pure Math., 40 Part 2 513-536 (1983).

12 Umezu, Y.: On normal projective surfaces with trivial dualizing sheaf. Tokyo J. Math. 4, 343-354 (1981).

13 Vieweg, E.: Rational singularities of higher dimensional schemes. Proceedings of the A.M.S. 63, 6-8 (1977).

14 Watanabe, K.: On plurigenera of normal isolated singularities I. Math. Annalen 250, 65-94 (1980).

15 Ishii, S.: On normal isolated Gorenstein singularities. preprint

16. Tsuchihashi: Higher dimensional analogues of periodic conti fractions and cusp singularities. Tohoku Math. J. 35. 607-639 (1983)

17. Iida, S.: Letter to K. Watanabe.